1Préparation de GdT

lundi 13 novembre 2023 09:29

X/k un schéma lisse / corps parfait, car $= p > 0$

$\mathbb{G}_a = \mathrm{Spec}\, k[x]$ le gp additif

$\mathbb{G}_a^\# = \mathrm{Spec}\, k\langle x\rangle$ l'enveloppe de puissance divisée à 0

$k\langle x\rangle = k[x, \dots, \gamma_n(x) = \text{"}\frac{x^n}{n!}\text{"}, \dots]$

crochet fléché : formellement ajouter

en. tel que car $= p > 0$ → $k\langle x\rangle = k\langle x = x_1, x_2, \dots\rangle / (x_1^p, x_2^p, \dots)$

on prend le quotient

$\mathbb{G}_a^{dR} := \mathrm{Cone}(\mathbb{G}_a^\# \to \mathbb{G}_a)$ un champs en SCR

<u>Def</u> le champs de deRham de X est défini comme le foncteur

$X^{dR}(R) := \mathrm{Map}_{dSt}(\mathrm{Spec}(\mathbb{G}_a^{dR}(R)), X) = X(\mathbb{G}_a^{dR}(R))$

qui envoie R à l'espace de morphismes des champs

Le <u>Thm</u> d'aujourd'hui $X^{dR} \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{Spec}\, k$

$R\pi_{1,*}\mathcal{O}_{X^{dR}} \simeq DR(X/k)$

le pushout du faisceaux structurel le long π_1 s'identifie avec la coh de dR

But : ① Expliquer le choix de transmutation ici.

② Demontrer la Théorème dessus

§ Affine : coh. de dR dérivée & adj

On commence par le cas affine et rappelle la définition de la Coh. dR dérivé

$$\begin{tikzcd} \mathrm{poly} \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "dR"'] & SCR \arrow[r, dashed, "dR"] & CAlg \end{tikzcd}$$

$\mathcal{P}_\Sigma(\mathrm{Poly}) =$

il existe uniquement une extension à SCR qui respecte les colimites par extension de Kan

dR → respect les somme directe

$\mathcal{D}^{cn}(k) \xrightarrow{fr} SCR \underset{dR^\vee}{\overset{dR}{\rightleftarrows}} CAlg$ Il possède un adjoint à droit

On prends

$X := \mathrm{Spec} A$, $X^{dR}(R) \overset{\text{déf.}}{\simeq} \mathrm{Map}_{CAlg}(DR(A)_k, R)$ par definition

$\simeq \mathrm{Map}_{SCR}(A, dR^\vee(R))$

$\simeq X(dR^\vee(R))$

Exactement la transmutation on cherche ! Maintenant on la calcule

$dR \longrightarrow \mathrm{id} \rightsquigarrow dR^\vee \leftarrow \mathrm{id}^\vee$

par filtration de Hodge

$$\begin{tikzcd} dR^\vee & \mathrm{id}^\vee \arrow[l] \\ & \mathbb{G}_a \arrow[u, phantom, "\cup"] \\ 0 \arrow[uu] & \mathrm{Ker} \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

l'adjoint à gauche de $\mathrm{Ker} : CAlg \to \mathrm{Mod}^{cn}$

est $\mathrm{Ker}^\vee(V) := k \otimes_{dR_{k[V]/k}} k[V]$

$F_H^* dR_{k[V]/k} \to k[V] \to k[V].V \to k[V]\wedge^2 V \dots$

$\mathrm{Ker}^\vee(V) \simeq k\langle V\rangle$

Remarque : $L\mathrm{Sym}^n(V[1]) \simeq \wedge^n(V)[n]$ $\wedge^n(V[1]) \simeq \Gamma^n(V)[n]$

On triche ici, car on ne sait pas $\mathrm{Ker}^\vee$ est complète au cas alternée. la demonstration précise utilise une filtration croissante exhaustive "conjugate"

Alors, $\mathrm{Ker}|_{CAlg^\heartsuit} = \mathbb{G}_a^\#$,

on a un morphisme de champs en SCR

$\mathrm{Cone}(\mathbb{G}_a^\# \to \mathbb{G}_a) \underset{\simeq}{\longrightarrow} dR^\vee$

Il y a deux raisonnements : ① Croyez moi ! ② qui prouve q.c plus générale

§ Champs de dR (filtré)

$* \xrightarrow{1} [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m] \xleftarrow{0} B\mathbb{G}_m$ On rappelle que le quotient $[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]$ encode les obj filtré

s.j. fil gr

$\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}$: quasi-idéal universelle

$\mathbb{G}_a^{dR,+} := \mathrm{Cone}\; \mathbb{V}(\mathcal{O}(-1))^\# \to \mathbb{G}_a$

— $\mathbb{G}_a^{dR,+}|_1 = \mathbb{G}_a^{dR}$

— $\mathbb{G}_a^{dR,+}|_0 = R \oplus B\mathbb{G}_a^\#(R)$

<u>Def</u> X sch. lisse $/k$

$X^{dR,+} \in St_{[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]}$

$X^{dR,+}(\mathrm{Spec}(R) \to [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]) = \mathrm{Map}_{St_k}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{G}_a^{dR,+}(R), X)$

$X^{Hodge} := gr(X^{dR,+})$

<u>Thm</u> $X \times [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m] \longrightarrow X^{dR,+} \xrightarrow{\pi_X} [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]$

Le faisceau $\mathcal{H}_{dR,+}(X) := R\pi_{X,*}\mathcal{O}_{X^{dR,+}}$ $(\to R\Gamma(X, \mathcal{O}))$ est q.c. et qui s'identifie avec $\mathrm{Fil}_H^* R\Gamma(X, \Omega^\bullet_{X/k}) \xrightarrow{gr^0} \mathcal{O}_X$

<u>Pf</u>

0) $\mathbb{G}_a^\#$ $(B\mathbb{G}_a^\#)$ est connexement présenté.

$R \in CAlg_k^\heartsuit$ s.t. $\mathbb{G}_a^\#$-acyclic ($\mathbb{G}_a(R) \twoheadrightarrow B\mathbb{G}_a^\#(R)$) forms a fpqc basis

alors $\forall R \in CAlg_k^\heartsuit$

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\, R' \arrow[r] \arrow[d, "f.f"] & B\mathbb{G}_a^\# \\ \mathrm{Spec}\, R \arrow[ur, dashed] \end{tikzcd}$$

$\mathbb{G}_a^\#$-acyclic $\in$; $\exists$ toujours ; par "cellular" raisonnement

$R \longrightarrow \mathbb{G}_a^{dR}(R)$ eq of étale site (étale rigid)

a) $X \mapsto X^{dR,+}$

$Sch_k \mapsto St_{[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]}$

Commute avec les limites qui est ind. avec "tor" (prod, fil) ne dépend pas les degré diff

b) $X \times [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m] \to X^{dR,+}$

un couvert de fpqc top pour X lisse

c) $U \to X$ étale vérifier sur R $\mathbb{G}_a^\#$-acy

$$\begin{tikzcd} U \times [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m] \arrow[r] \arrow[d] & U^{dR,+} \arrow[d] \\ X \times [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m] \arrow[r] & X^{dR,+} \end{tikzcd}$$

Cartesian

d) $X = \mathrm{colim}\, U^\cdot$ { colim fini, $U^i \subset X$ ouvert Zariski

alors $X^{dR,+} = \mathrm{colim}\, U^{dR,+}$

Step 1 : $\mathcal{H}_{dR,+}(X) \in QC([\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m])$ & $gr\,\mathcal{H}_{dR,+}(X)$ pushforward de $X^{Hodge} \to B\mathbb{G}_m$

Par d), supposer que $X \underset{b}{\xrightarrow{\text{étale}}} \mathbb{A}^n$, $G := \mathbb{V}(\mathcal{O}(-1))^{\#,n}$

$$\begin{tikzcd} {[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]} \arrow[d, "f"] & X \times [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m] \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\text{cov.pl}"] & \mathbb{A}^n \times [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m] \arrow[d, "\text{cov.pl, } G\text{-torseur}"] \\ BG & X^{dR,+} \arrow[l, "g"] \arrow[r] & (\mathbb{A}^n)^{dR,+} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}_{dR,+}(X) \simeq R\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{BG}, Rg_*\mathcal{O}_{X^{dR,+}})$

$\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_G\text{-comod}}(\mathcal{O}_{[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]}, Lf^* Rg_* \mathcal{O}_{X^{dR,+}})$

$\simeq Rg'_* \mathcal{O}_{X \times [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]}$

Step 2 : $gr\,\mathcal{H}_{dR,+}(X)$

$$\begin{tikzcd} X^{Hodge}(\mathrm{Spec}\, R \to B\mathbb{G}_m) \arrow[r] & X(R) \\ \mathrm{Map}_R(\mathbb{L}_{X,x}, \mathbb{G}_a^\#(R)[1](-1)) \arrow[u] \arrow[r] & \{x\} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$X^{Hodge} \simeq B(T_{X/k}(-1))^\#$

Alors on calcule la section globale voila une lemme fondamental

E es. vec sur X,

<u>Lemma</u> $QC(B\,\mathbb{V}(E)^\#) \simeq QC(\widehat{\mathbb{V}(E^\vee)})$

<u>Pf.</u>

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}(E)^\# \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r] & B\mathbb{V}(E)^\# \end{tikzcd}$$

f^*M ; M

Obs. $0 \to \mathcal{O}_X \to \Gamma(E^\vee) \xrightarrow{\langle \dots, \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots\rangle} \Gamma(E^\vee) \otimes E^\vee \to 0$ dans $QC(X)$ $\mathbb{V}(E)^\#$-eq

1. $M \otimes_{\mathcal{O}_X}$, $\Rightarrow f'^*$ est comonadique

$\Rightarrow f^*$ est comonadique

$\Rightarrow QC(B\mathbb{V}(E)^\#) \simeq \mathrm{Rep}(\mathbb{V}(E)^\#, QC(X))$

2. $M \to M \otimes \Gamma(E^\vee)$ nil. potent

$\Updownarrow$

$M \otimes \widehat{L\mathrm{Sym}\, E} \to M$

par complexe de Koszul

$R\pi_*\mathcal{O}_{X^{Hodge}} \simeq \mathcal{H}om_{L\mathrm{Sym}\,T[1](-1)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ "dualité de Koszul"

$\simeq L\mathrm{Sym}(\mathbb{L}[-1](1))$

Step 3 : d vs dR-diff

$\mathcal{H}_{dR,+}(-)$ un faisceau

$\Rightarrow \exists\, X \xrightarrow{\text{étale}} \mathbb{A}^n \Rightarrow X = \mathbb{A}^1$

$\overset{x}{\mathbb{A}^1} \times \overset{t}{[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]} \to \mathbb{G}_a^{dR,+}$

$\mathcal{O}_{\mathbb{V}(\mathcal{O}(-1))^\#} \simeq k[t]\langle xt^{-1}\rangle$

$$\begin{tikzcd} k[t] \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{V}(\mathcal{O}(-1))^\#} \arrow[r, "t\frac{d}{dx}"] & \mathcal{O}_{\mathbb{V}(\mathcal{O}(-1))^\#}(1) \\ \mathcal{H}_{dR,+}(\mathbb{A}^1) \arrow[r] \arrow[u] & k[t,x] \arrow[r] \arrow[u, hook] & k[t,x](1) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$