

X/k un schéma lisse / corps parfait, $\text{car} = p > 0$

$\mathcal{O}_a = \text{Spec } k[X]$ le gp additif
 $\mathcal{O}_a^\# = \text{Spec } k\langle X \rangle$ l'anneau de puissance divisée à 0

$k\langle X \rangle = k[X, \dots, \partial_n(X) = \frac{X^n}{n!}, \dots]$
 aschéf-fêché : formellement régulier
 en fait par $\text{car} = p > 0$ on prend le quotient (X^p, X^2, \dots)

$\mathcal{O}_a^{dR} := \text{Cone}(\mathcal{O}_a^\# \rightarrow \mathcal{O}_a)$ un champ en SCR

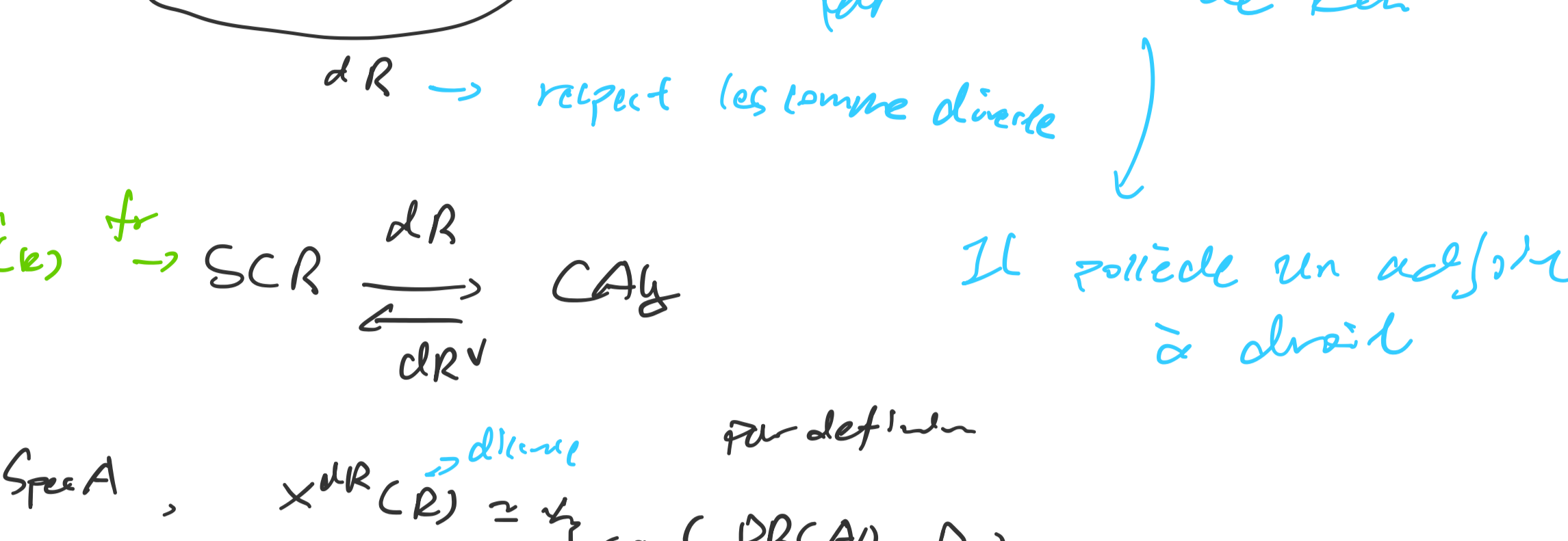
Def le champ de de Rham de X est défini comme le foncteur
 $X^{dR}(R) := \text{Map}_{\text{alg}}(\text{Spec}(\mathcal{O}_a^{dR}(R)), X) = X(\mathcal{O}_a^{dR}(R))$
 qui envoie R à l'espace de morphismes des champs

Le Thm d'ajout de $X^{dR} \xrightarrow{\pi_1} \text{Spec } k$
 $R\pi_{1,*} \mathcal{O}_{X^{dR}} \simeq DR(X/k)$

le pullback des faisceaux relie le log π_1 s'identifie avec la coh de DR
 But: ① Expliquer le choix de transmutation ici.
 ② Démontrer la Théorème de de Rham

§ Affine : coh. de dR dérivée & adj

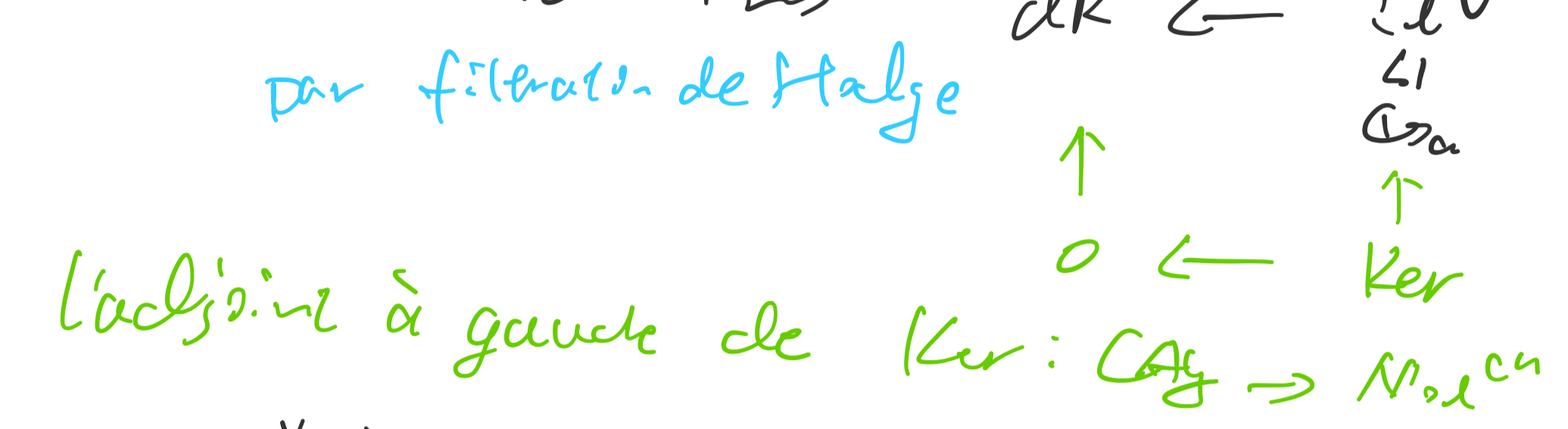
On commence par le cas affine et rappelle la définition de la coh. dR dérivée



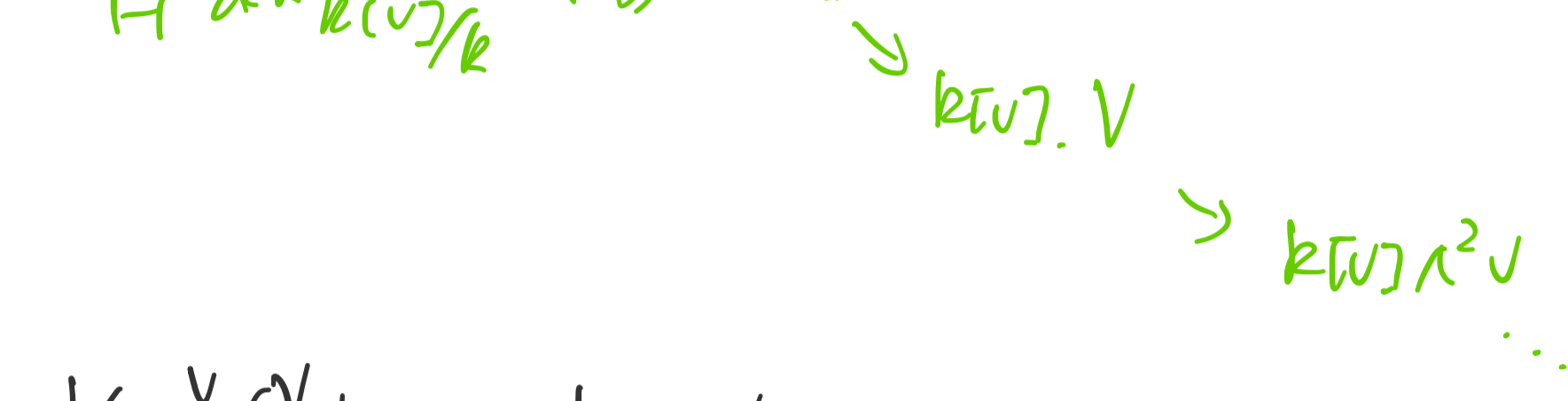
$\mathcal{O}_a^{dR} \xrightarrow{dR} \text{SCR} \xrightarrow{dR} \text{Cat}_{\mathbb{Z}}$ Il possède un adjoint à droite

On prends $X := \text{Spec } A$, $X^{dR}(R) \stackrel{\text{par définition}}{=} \text{Map}_{\text{SCR}}(DR(X), R) \stackrel{\text{par définition}}{=} \text{Map}_{\text{SCR}}(A, DR^V(R)) \stackrel{\text{par définition}}{=} X(DR^V(R))$

Écrasons la transmutation on obtient : Maintenant on la calcule



l'adjoint à gauche de $\text{Ker} : \text{Cat}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Mod } \mathbb{Z}$
 est $\text{Ker}^V(V) := k \oplus \text{Ker}^V(V)$



$\text{Ker}^V(V) \simeq k\langle V \rangle$

Remarque: $L_{\text{Sym}}(V \oplus W) \simeq L(V) \oplus L(W)$ $L(V \oplus W) \simeq L(V) \oplus L(W)$

On s'écrit ici, car on ne sait pas Ker^V est complète des carrés adjoints.
 la démonstration précède utilise une filtration croissante exhaustive "conjugate"

Après, $\text{Ker}^V = \mathcal{O}_a^\#$

on a un morphisme de champs en dR

$\text{Cone}(\mathcal{O}_a^\# \rightarrow \mathcal{O}_a) \rightarrow DR^V$

Il y a deux raisonnements: ① croyez-moi: ② qui prouve q.c plus générale

§ Champs de dR (filtré)

* $1 \rightarrow [A/\mathcal{O}_m] \leftarrow \mathbb{Z} \mathcal{O}_m$ On rappelle que le quotient $[A/\mathcal{O}_m]$ encode les obj filtrés
 s.j. $f|_1 \quad f|_0$

$\mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O} : \text{quot.} = \text{idéal universel}$

$\mathcal{O}_a^{dR,+} := \text{Cone}(V(\mathcal{O}_a(-1))^\# \rightarrow \mathcal{O}_a)$

$\mathcal{O}_a^{dR,+}|_1 = \mathcal{O}_a^{dR}$

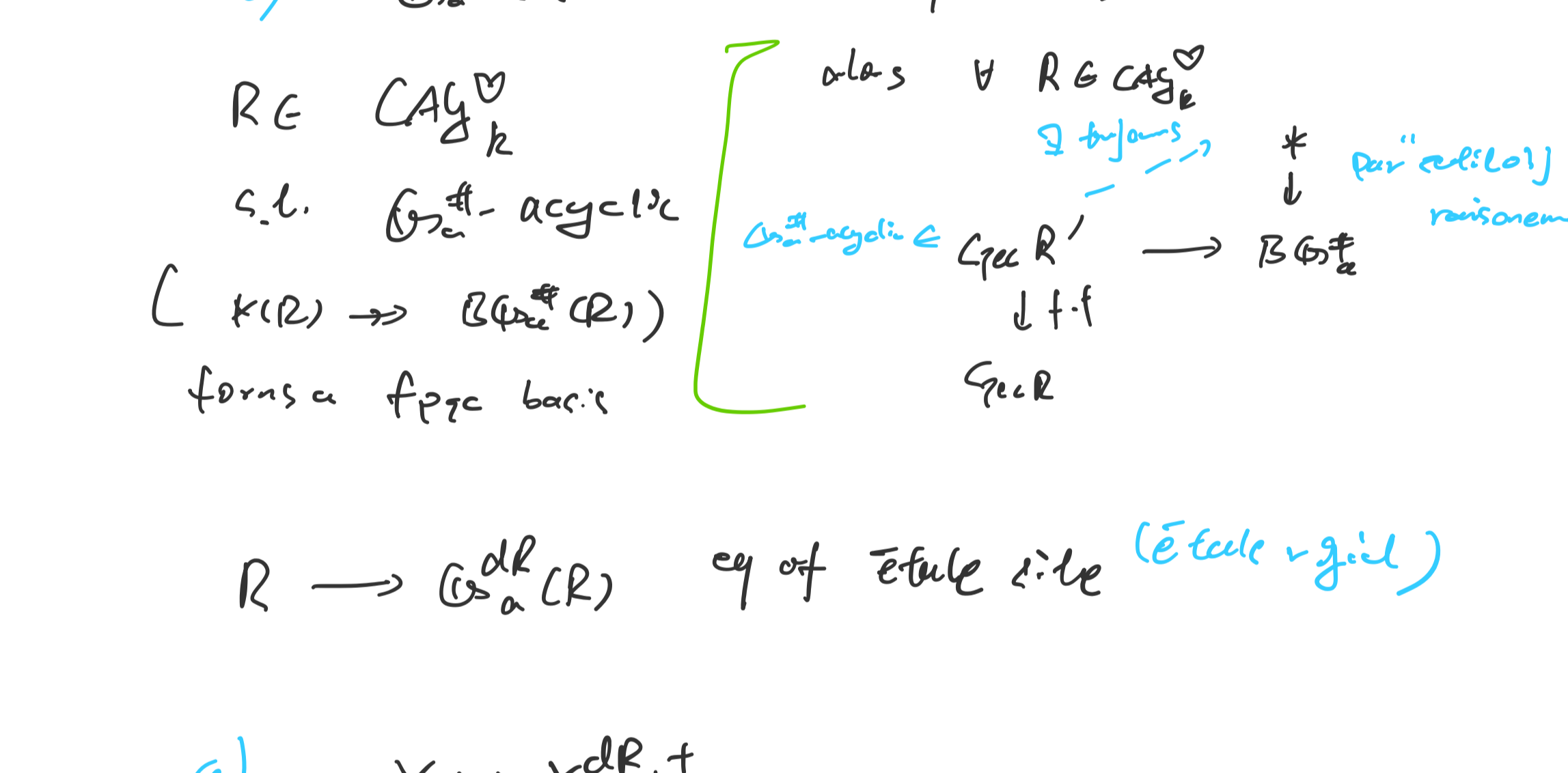
$\mathcal{O}_a^{dR,+}|_0 = R \oplus \mathcal{B}\mathcal{O}_a^\#(R)$

Def X sch. lisse / k
 $X^{dR,+} \in \text{Sch}_{[A/\mathcal{O}_m]}$

$X^{dR,+}(R) = \text{Map}_{\text{Sch}_k}(\text{Spec}(\mathcal{O}_a^{dR,+}(R)), X)$
 $X^{\text{Hodge}} := \text{gr}(X^{dR,+})$

Thm $X \times [A/\mathcal{O}_m] \rightarrow X^{dR,+} \xrightarrow{\pi_X} [A/\mathcal{O}_m]$

Le faisceau $\mathcal{H}_{dR,+}(X) := R\pi_{X,*} \mathcal{O}_{X^{dR,+}}(\rightarrow R\mathcal{P}(X, \mathcal{O}))$ est g.c. et est s'identifie avec $F_{-1}^* L_{\text{Sym}}(R\mathcal{P}(X, \mathcal{O}_{X^V})) \rightarrow \mathcal{O}_X$



a) $X \mapsto X^{dR,+}$
 Sch $k \mapsto \text{Sch}_{[A/\mathcal{O}_m]}$
 commute avec les limites qui est incl. avec tor: Cprod, fib ve ditre par les degré diff

b) $X \times [A/\mathcal{O}_m] \rightarrow X^{dR,+}$
 un couplet de fpgc top pour X lisse

c) $U \rightarrow X$ étale vérifier sur R $\mathcal{O}_a^\#$ -alg
 $U \times [A/\mathcal{O}_m] \rightarrow U^{dR,+}$
 \downarrow \downarrow
 $X \times [A/\mathcal{O}_m] \rightarrow X^{dR,+}$

d) $X = \text{colim } U$ $\left\{ \begin{matrix} \text{coll. fini} \\ U \in X \text{ ouvert, Zariski.} \end{matrix} \right.$
 alors $X^{dR,+} = \text{colim } U^{dR,+}$

Step 1: $\mathcal{H}_{dR,+}(X) \in \mathcal{QC}([A/\mathcal{O}_m])$ & $\text{gr } \mathcal{H}_{dR,+}(X)$ pull-back de $X^{\text{Hodge}} \rightarrow \mathcal{B}\mathcal{O}_a$

Par d), supposons que $X \xrightarrow{\text{étale}} \mathbb{A}^n$, $\mathcal{O}_a := V(\mathcal{O}_a(-1))^\#$

$[A/\mathcal{O}_m] \leftarrow X \times [A/\mathcal{O}_m] \rightarrow \mathbb{A}^n \times [A/\mathcal{O}_m]$
 \downarrow \downarrow \downarrow
 $\mathcal{B}\mathcal{O}_a \leftarrow X^{dR,+} \rightarrow (\mathbb{A}^n)^{dR,+}$

$\Rightarrow \mathcal{H}_{dR,+}(X) \simeq R\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\mathcal{B}\mathcal{O}_a}, R\mathcal{H}_{dR,+}(\mathbb{A}^n))$
 $\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_a\text{-comod}}(\mathcal{O}_{[A/\mathcal{O}_m]}, L^{++}R\mathcal{H}_{dR,+}(\mathbb{A}^n))$

Step 2: $\text{gr } \mathcal{H}_{dR,+}(X)$

$X^{\text{Hodge}}(\text{Spec } R \rightarrow \mathcal{B}\mathcal{O}_a) \rightarrow X(R)$
 \uparrow \uparrow
 $\text{Map}_R(L_{X, \mathcal{O}_a}, \mathcal{O}_a^\#(R)(-1)) \rightarrow \{x\}$
 \subset \uparrow

$X^{\text{Hodge}} \simeq \mathcal{B}(T_{X/k}(-1))^\#$

Alors on calcule la section globale es. vec sur X , voir une lemma fondamentale $\mathcal{QC}(\mathcal{B}V(\mathbb{E}))^\# \simeq \mathcal{QC}(\widehat{V(\mathbb{E}^V)})$

Def. $V(\mathbb{E})^\# \rightarrow X$ f^*M
 $\downarrow f^*$ $f^* \downarrow$
 $X \rightarrow \mathcal{B}V(\mathbb{E})^\#$ M

Obs. $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{E}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{E}^V) \otimes \mathbb{E}^V \rightarrow V(\mathbb{E})^\# \rightarrow 0$
 dans $\mathcal{QC}(X)$

1. $M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{E} \rightarrow f^* \mathbb{E}$ est canonique
 $\Rightarrow f^*$ est canonique
 $\Rightarrow \mathcal{QC}(\mathcal{B}V(\mathbb{E})^\#) \simeq \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(V(\mathbb{E})^\#, \mathcal{QC}(X))$

2. $M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{E}^V$ nil. point
 \downarrow
 $M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{E}^V \rightarrow M$
 par complexe de Koszul

$R\mathcal{H}_{dR,+} \simeq \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$
 $\simeq L_{\text{Sym}} \pi_{1!}(\mathbb{E})$ "dualité de Koszul"
 $\simeq L_{\text{Sym}}(L[-1](\mathbb{E}))$

Step 3: dR-diff

$\mathcal{H}_{dR,+}(-)$ un faisceau
 $\Rightarrow \exists X \rightarrow \mathbb{A}^n \Rightarrow X = \mathbb{A}^1$

$\mathbb{A}^1 \times [A/\mathcal{O}_m] \rightarrow \mathcal{O}_a^{dR,+}$

$\mathcal{O}_{V(\mathcal{O}_a(-1))^\#} \simeq k[t]\langle X+t \rangle$

$k[t] \rightarrow \mathcal{O}_{V(\mathcal{O}_a(-1))^\#} \xrightarrow{t \frac{d}{dt}} \mathcal{O}_{V(\mathcal{O}_a(-1))^\#}(1)$
 \uparrow \uparrow \uparrow
 $\mathcal{H}_{dR,+}(\mathbb{A}^1) \rightarrow k[t] \rightarrow k[t] \otimes \mathbb{E}^V$